CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

26 ianuarie 2013

BAREM

CLASA A IX-A

Programa TC+CD (3 ore/săpt)

1.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	Deoarece $x=\frac{x-2013}{x+2013}=1-\frac{4026}{x+2013}\in\mathbb{N}$, rezultă $\frac{4026}{x+2013}\leq 1$,	**2p**
	deci x≥2013 şi x+2013 divide 4026	**1p**
	Ca urmare $x+2013\in\{2013,\ 4026\}$, de unde $x\in\{0,2013\}$ dar $x=0$ nu convine $\Rightarrow M=\{2013\}$	**2p**
b.)	$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}\ \Rightarrow\ \frac{a^2y+b^2x}{xy}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$	**1p**
	$\cancel{a^2xy}+b^2x^2+a^2y^2+\cancel{b^2xy}\geq\cancel{a^2xy}+2abxy+\cancel{b^2xy}$	**1p**
	$b^2x^2-2abxy++a^2y^2\geq 0\Rightarrow(bx-ay)^2\geq 0\quad(A)$	**2p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
a)	$a_{n+1}=3n+5$	**1p**
	$a_{n+1}-a_n=3\ \Rightarrow\ (a_n)_{n\in N^*}$ progresie aritmetică	**1p**
b)	$S_{100}=15350$	**2p**
c)	Utilizând egalitatea $\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$, pentru $k=\overline{1,n-1}$	**2p**
	Obţinem $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$	**1p**
	Cum $\frac{n-1}{a_1a_n}=\frac{n-1}{a_1\cdot(a_1+(n-1)3)}=\frac{n-1}{25+15(n-1)}$	**1p**
	Obţinem ecuaţia $\frac{n-1}{25+15(n-1)}=\frac{2012}{30205}$ de unde $n=2013\in\mathbb{N}$	**1p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
	Coordonatele punctelor sunt: $A(1,a+b),\ B(0,b),\ C(0,a)$	**3p**
	Lungimile laturilor sunt: $AB=\sqrt{1+a^2},\ AC=\sqrt{1+b^2},\ BC=a-b$	**3p**
	Avem relaţiile $AB>AC$ şi $AB>BC$	**1p**
	Presupunând că triunghiul este dreptunghic, ajungem la $a=b$, fals	**1p**
	Aria triunghiului este $A_{ABC}=\frac{BC\cdot d(A,Oy)}{2}=\frac{a-b}{2}$	**1p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
a)	În triunghiul *DEF*, din *BF=2FD* rezultă $\frac{FD}{FB}=\frac{1}{2}, \overrightarrow{EF}=\frac{\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{ED}}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{FE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DE}$ (1)	**3p**
b)	Analog din triunghiurile *ABC* şi *ADC* exprimăm vectorii $\overrightarrow{BE}$ şi $\overrightarrow{DE}$ obţinem: $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$	**4p**
	Înlocuind aceste relaţii în (1), obţinem: $\overrightarrow{FE}=\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}\right)+\frac{2}{9}\left(\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DC}\right)$ echivalent cu $9\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{DC}$	**2p**